Available at WWW.MATHEMATICSWEB.ORG
POWERED BY SCIENCE @ DIRECT

ACADEMIC PRESS

Journal of Algebra 261 (2003) 1–18

JOURNAL OF Algebra

www.elsevier.com/locate/jalgebra

Gamétisation d'algèbres pondérées

Cristián Mallol,[a,*,1] Richard Varro,[b] and Raúl Benavides[c]

[a] *Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de La Frontera, Casilla 54-D, Temuco, Chile*
[b] *Département de Mathématiques et Informatique Appliquées, Université Paul Valéry, 34032 Montpellier, France*
[c] *Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de La Frontera, Casilla 54-D, Temuco, Chile*

Reçu le 15 avril 2001

Communiqué par Efim Zelmanov

Résumé

On introduit la notion de gamétisation d'une algèbre pondérée comme un outil simple qui facilite l'étude de structures qui vérifient des identités ω-polynomiales. Concernant les train-identités d'ordre quelconque, on établit l'existence des identités invariantes par gamétisation et leur forme y est précisée. Des résultats de classification y sont donnés pour les algèbres d'ordre plus petit ou égal à 4.

1. Introduction

Dans ce qui suit K est un corps et A une K-algèbre commutative non nécessairement associative. Si $x \in A$ on définit les puissances principales (respectivement, pleines) de x par $x^1 = x$ et $x^{n+1} = xx^n$ (respectivement, $x^{[1]} = x$ et $x^{[n+1]} = (x^{[n]})^2$. Si X et Y sont deux sous-espaces de A, XY désigne le sous-espace engendré par les produits xy, $x \in X$ et $y \in Y$; récursivement on définit les sous-espaces X^n.

On dit qu'une algèbre est pondérable s'il existe $\omega : A \to K$, morphisme non trivial d'algèbres ; quand on parle d'algèbre pondérée on se réfère à une paire (A, ω). L'existence d'un idempotent $e \in A$ de poids 1 ($e^2 = e$ et $\omega(e) = 1$), entraîne une décomposition de Peirce $A = Ke \oplus \ker(\omega)$, $\ker(\omega)$ étant un idéal de A ; l'étude des valeurs propres de

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : cmallol@ufro.cl (C. Mallol), richard.varro@univ-montp3.fr (R. Varro), rbenavid@ufro.cl (R. Benavides).
1 Avec l'appui de FONDECYT (L.C.) 8990001, Chile.

0021-8693/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S0021-8693(02)00681-6

$L_e : \ker(\omega) \to \ker(\omega),\ x \mapsto ex$, complète la décomposition de l'algèbre en utilisant les sous-espaces propres qui se dégagent.

La notion d'algèbre pondérée a été introduite par I.M.H. Etherington (cf. [3]) et son développement fait partie de l'étude des algèbres non associatives, tout particulièrement en ce qui concerne les algèbres génétiques, les train-algèbres, les algèbres de Bernstein et autres ; concernant tout ceci on peut voir [4,5,9,12]. De plus, une vision plus homogène et très complète est présentée dans [8,13].

Dans ce qui suit, nous excluons les idempotents de poids nul ; de ce fait, $\mathrm{Ip}(A) = \{e \in A \mid e^2 = e,\ \omega(e) = 1\}$. De même, pour les automorphismes $\Psi : A \to A$ et les dérivations $d : A \to A$ on exige une compatibilité avec la structure d'algèbre pondérée, c'est-à-dire, $\omega \circ \Psi = \Psi$ et $\omega \circ d = 0$. A vrai dire, ces exigences émergent tout à fait naturellement dans presque la totalité des cas d'étude de ce type d'algèbre, tout particulièrement celles déterminées par une identité ω-polynomiale.

Comme on le verra par la suite, toute algèbre pondérée contient trivialement une structure sous-jacente (muette) d'algèbre gamétique. Dans ce travail, nous utilisons ceci et la notion de mélange convexe d'algèbres (cf. [6]) pour introduire l'idée d'algèbre « gamétisée », outil nous permettant de simplifier l'étude de certaines familles classiques d'algèbres pondérées.

2. Préliminaires

Ce qui suit s'inscrit dans l'esprit développé dans [1] afin de donner un traitement polynomial formel aux identités qui jouent un rôle dans certaines algèbres pondérées.

Définition 1. Si A est pondérée et $n \geqslant 2$, on appelle identité ω-polynomiale (ou ω-identité) d'ordre n et de monôme directeur $M_n(X)$, une expression $E_n(x)$ du type :

$$E_n(x) : M_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \omega(x)^{n-k} M_k(x)$$

où $M_k(X)$ dénote un monôme non associatif (un parenthésage) de degré k. Si pour tout $x \in A$, $E_n(x)$ est vraie, on dit que l'algèbre satisfait l'identité ω-polynomiale. Enfin, on parle de train-identité d'ordre n si l'identité est formée par des puissances principales, c'est-à-dire, de la forme :

$$x^n = \alpha_{n-1}\omega(x)x^{n-1} + \alpha_{n-2}\omega(x)^2 x^{n-2} + \cdots + \alpha_1 \omega(x)^{n-1} x.$$

Une algèbre vérifiant une train-identité est appelée train-algèbre.

Remarque 2. Les algèbres gamétiques, ainsi que les algèbres de Bernstein et celles d'Etherington sont des structures vérifiant des identités ω-monomiales, à savoir, caractérisées respectivement par :

$$x^2 = \omega(x)x, \qquad \left(x^2\right)^2 = \omega(x)^2 x^2 \quad \text{et} \quad \left(x^2\right)^2 = \omega(x)^3 x.$$

Si une algèbre vérifie une identité ω-polynomiale $E_n(x)$, il est immédiat que $\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_1 = 1$ et, de ce fait, tout idempotent est forcément de poids 1. De plus, la pondération ω est unique : en effet, comme pour tout $x \in \ker(\omega)$ on a $M_n(x) = 0$, il s'ensuit que si $\overline{\omega}$ est une autre pondération alors $\ker(\omega) \subset \ker(\overline{\omega})$ d'où $\overline{\omega} = \omega$ (cf. [10]).

Proposition 3. *Soit (A, ω) une algèbre pondérée. Pour qu'une identité ω-polynomiale $E_n(x)$ soit vérifiée par A il faut et il suffit qu'elle soit vérifiée par tous les $y \in A$, $\omega(y) = 1$.*

Démonstration. En effet, dans ces conditions elle est aussi satisfaite par tous les éléments x de poids non nul car $E_n(x) = \omega(x)^n E_n(\omega(x)^{-1}x)$; le résultat s'étend à toute l'algèbre par la topologie de Zariski (ou, d'une autre façon, en polarisant $E_n(y + z)$ avec y, $z \in A$, $\omega(y) = 1$ et $\omega(z) = 0$). $\square$

3. Gamétisation d'une algèbre pondérée

Soit V un K-espace vectoriel. Si l'on a sur V deux structures d'algèbre $(V, \cdot)$ et $(V, *)$, pour tout $\alpha \in K$ on peut définir un troisième produit de la façon suivante :

$$x \diamond y = (1 - \alpha)(x \cdot y) + \alpha(x * y).$$

Dans ce cas, on dira que $(V, \diamond)$ est le mélange convexe (de taux α) des algèbres $(V, \cdot)$ et $(V, *)$.

Dorénavant K est un corps de caractéristique différente de 2. Dans ces conditions, si V est un espace vectoriel, se donner une forme linéaire $f : V \to K$ conduit à se donner une structure d'algèbre gamétique sur V, car on peut toujours définir le produit

$$x \circ y = \frac{1}{2}\big(f(y)x + f(x)y\big).$$

Définition 4. Soient (A, ω) une algèbre pondérée et $\gamma \in K$. Nous appelons gamétisée selon γ l'algèbre A_γ qui résulte du mélange convexe (de taux γ) entre le produit originel de A et le produit gamétique donné par la pondération. On dénote :

$$(xy)_\gamma = (1 - \gamma)xy + \frac{1}{2}\gamma\big(\omega(y)x + \omega(x)y\big).$$

On a $A_0 = A$ et A_1 est l'algèbre gamétique. Il est clair que le dernier cas n'a pas d'intérêt car on perd toute l'information du produit originel de l'algèbre. De plus :

Proposition 5. (a) *$A_\gamma = A$ si et seulement si A est gamétique ou si $\gamma = 0$.*
(b) *Si $\gamma \neq 0$, $(A_\gamma)_\gamma = A$ si et seulement si $\gamma = 2$.*

Démonstration. Si $(xy)_\gamma = xy$ alors

$$(1 - \gamma)xy + \frac{1}{2}\gamma\big(\omega(y)x + \omega(x)y\big) = xy,$$

d'où

$$\gamma\left[xy - \frac{1}{2}\big(\omega(y)x + \omega(x)y\big)\right] = 0.$$

Ceci prouve que si $\gamma \neq 0$ alors A est une algèbre gamétique. La réciproque est immédiate. Quant à (b), un calcul simple montre que le taux de gamétisation de $(A_\gamma)_\gamma$ est $2\gamma - \gamma^2$, c'est-à-dire que $(A_\gamma)_\gamma = A_{2\gamma-\gamma^2}$. Il suffit donc d'appliquer (a) pour conclure. □

Dorénavant, on exclus le cas $\gamma = 1$ et compte tenu du résultat ci-dessus, sauf mention du contraire, on suppose que $\gamma \neq 0$.

Le produit gamétisé $(..)_\gamma$ est parfaitement déterminé dès qu'on connaît les carrés y_γ^2 pour tous les $y \in A$, $\omega(y) = 1$. Ceci vient d'un résultat plus général :

Proposition 6. *Soit V un espace vectoriel muni de deux structures d'algèbre. S'il existe $f : V \to K$ une forme linéaire telle que les deux produits coïncident sur les $y \in V$, $f(y) = 1$, alors ces produits sont égaux.*

Démonstration. Dénotons « $\diamond$ » et « $\cdot$ » les produits en question. Comme $\mathrm{car}(K) \neq 2$, les produits « $\diamond$ » et « $\cdot$ » sont déterminés par les carrés respectifs. Or, si $f(x) \neq 0$, on a

$$x \diamond x = f(x)^2\left(\frac{1}{f(x)}x\right) \diamond \left(\frac{1}{f(x)}x\right) = f(x)^2\left(\frac{1}{f(x)}x\right) \cdot \left(\frac{1}{f(x)}x\right) = x \cdot x.$$

Soit maintenant $z \in V$, $f(z) = 0$: si $y \in V$, $f(y) = 1$, on a

$$(y + z) \diamond (y + z) = (y + z) \cdot (y + z),$$

d'où on déduit que :

$$2(y \diamond z) + z \diamond z = 2(y \cdot z) + z \cdot z;$$

puis, en changeant z par $2z$, on obtient :

$$4(y \diamond z) + 4(z \diamond z) = 4(y \cdot z) + 4(z \cdot z).$$

De ces deux égalités il découle que $z \diamond z = z \cdot z$. □

Il est immédiat que si $\omega(x) = 0$, alors $x_\gamma^n = (1-\gamma)^{n-1}x^n$. De même, si $\omega(x) \neq 0$ on voit que :

$$x_\gamma^n = \omega(x)^n\left(\frac{1}{\omega(x)}x\right)_\gamma^n.$$

Cela veut dire qu'il suffit de connaître les puissances gamétisées des éléments de poids 1. Concernant ceci, nous avons :

Proposition 7. *Soit $x \in A$, $\omega(x) = 1$. Alors les puissances principales gamétisées de x sont de la forme*

$$x_\gamma^n = \sum_{k=1}^{n} (1-\gamma)^{k-1} \overline{\gamma}_{n,k} x^k,$$

où $\overline{\gamma}_{n,k} \in K[\gamma]$, avec la relation récursive :

$$\overline{\gamma}_{1,1} = 1 \quad et \quad \overline{\gamma}_{n+1,k} = \frac{\gamma}{2} \overline{\gamma}_{n,k} + \overline{\gamma}_{n,k-1},$$

et les conditions :

$$\overline{\gamma}_{n,n+1} = 0 \quad et \quad \overline{\gamma}_{n,0} = \frac{\gamma}{2}.$$

Démonstration. Le résultat découle de :

$$x_\gamma^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (1-\gamma)^{k-1} \overline{\gamma}_{n+1,k} x^k = \left(x x_\gamma^n\right)_\gamma.$$

Mais, $(x x_\gamma^n)_\gamma = (1-\gamma) x x_\gamma^n + \frac{\gamma}{2}(x + x_\gamma^n)$, d'où

$$x_\gamma^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (1-\gamma)^k \overline{\gamma}_{n,k} x^{k+1} + \frac{\gamma}{2} \left(x + \sum_{k=1}^{n} (1-\gamma)^{k-1} \overline{\gamma}_{n,k} x^k \right).$$

Puis, il ne reste qu'à comparer les coefficients selon les puissances de x, en imposant les conditions nécessaires sur $\overline{\gamma}_{n,n+1}$ et $\overline{\gamma}_{n,0}$. □

Les résultats des Propositions 3 et 6 permettent de simplifier l'écriture sans perte de généralité ; de ce fait, il suffira pour une identité ω-polynomiale d'écrire :

$$E_n(x) : M_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k M_k(x).$$

De même, chaque fois qu'il sera convenable, dans nos opérations nous travaillerons avec des éléments de poids 1.

Remarque 8. Si l'on développe en série formelle la fonction génératrice f des $\overline{\gamma}_{n,k}$, obtenue à partir de :

$$f(x, y) = \sum_{p \geqslant 1} \sum_{0 \leqslant q \leqslant p} \overline{\gamma}_{p,q} x^p y^q$$

en utilisant la relation récursive concernant les coefficients $\overline{\gamma}_{n,k}$ explicitée dans la proposition ci-dessus, on trouve :

$$\overline{\gamma}_{n,k} = \binom{n}{k}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n-k} + \frac{\gamma}{4}(2-\gamma)\sum_{i=0}^{n-k-2}\binom{k+i}{k}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{i} \qquad (*)$$

avec, bien sur, la convention que la dernière somme est nulle si $n-k<2$. On omet les calculs de tout ceci, d'autant plus que la validité de formule $(*)$ se prouve aisément par récurrence.

Il s'ensuit que pour $\gamma = 2$ (cas très particulier comme on verra par la suite) on a :

$$x_2^n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

ce qu'on peut exprimer par l'écriture formelle : $x_2^n = 1-(1-x)^n$.

Enfin, voici une liste de quelques puissances principales gamétisées, dont nous aurons besoin ci-après :

$$\begin{aligned}
x_\gamma^2 &= (1-\gamma)x^2 + \gamma x,\\
x_\gamma^3 &= (1-\gamma)^2x^3 + \frac{3\gamma(1-\gamma)}{2}x^2 + \frac{\gamma(1+\gamma)}{2}x,\\
x_\gamma^4 &= (1-\gamma)^3x^4 + 2\gamma(1-\gamma)^2x^3 + \frac{\gamma(1-\gamma)(2+5\gamma)}{4}x^2 + \frac{\gamma(2+\gamma+\gamma^2)}{4}x.
\end{aligned}$$

Remarque 9. Il est immédiat que $\omega(x_\gamma^2) = \omega(x)^2$; de ce fait l'algèbre gamétisée A_γ est pondérée par ω. Ainsi, si Ω dénote la classe des algèbres pondérées, nous avons des opérateurs de gamétisation

$$O_\gamma : \Omega \to \Omega, \quad (A,\omega) \mapsto (A_\gamma, \omega).$$

Un simple calcul montre que l'ensemble $\Gamma = \{O_\gamma \mid \gamma \in K - \{1\}\}$ est un groupe commutatif isomorphe à $K - \{1\}$ muni du produit

$$\delta \bullet \gamma = \delta + \gamma - \delta\gamma;$$

c'est-à-dire, on a $O_\delta \circ O_\gamma = O_{\delta\bullet\gamma}$. Ceci veut dire que Γ opère sur Ω avec mémoire, car à tout moment on peut récupérer la structure originelle des algèbres qu'on transforme avec les O_γ. Ils se posent deux sortes de questions : d'un côté, l'étude des propriétés invariantes sous l'action de Γ ; de l'autre, la structure des orbites sous cette action, dont on verra quelque cas particuliers.

Nous avons :

Théorème 10. *Soient (A,ω) une algèbre pondérée et $\gamma \in K - \{1\}$. Alors* :

(a) $\mathrm{Aut}(A_\gamma) = \mathrm{Aut}(A)$.
(b) $\mathrm{Der}(A_\gamma) = \mathrm{Der}(A)$.

(c) $\mathrm{Nilp}(A_\gamma) = \mathrm{Nilp}(A)$.
(d) $\mathrm{Ip}(A_\gamma) = \mathrm{Ip}(A)$.
(e) *Un idempotent engendre les mêmes décompositions de Peirce dans A et A_γ.*

Démonstration. Les techniques étant similaires, nous allons montrer (b) et (e) : soit $d \in Der(A)$; on a :

$$\begin{aligned}
d\big((xy)_\gamma\big) &= d\bigg((1-\gamma)xy + \frac{1}{2}\gamma\big[\omega(y)x + \omega(x)y\big]\bigg)\\
&= (1-\gamma)\big(d(x)y + xd(y)\big) + \frac{1}{2}\gamma\big[\omega(y)d(x) + \omega(x)d(y)\big]\\
&\quad \text{(puisque } \omega \circ d \text{ est nul)}\\
&= (1-\gamma)d(x)y + \frac{1}{2}\gamma\big[\omega(y)d(x) + \omega\big(d(x)\big)y\big]\\
&\quad + (1-\gamma)xd(y) + \frac{1}{2}\gamma\big[\omega(x)d(y) + \omega\big(d(y)\big)x\big]\\
&= \big(d(x)y\big)_\gamma + \big(xd(y)\big)_\gamma.
\end{aligned}$$

Pour ce qui est de (e), plus généralement, soient $x \in A$, $\omega(x) = 1$, λ une valeur propre de L_x et $z \in \ker(\omega)$, tel que $xz = \lambda z$. On a :

$$(xz)_\gamma = (1-\gamma)xz + \frac{1}{2}\gamma\big(\omega(x)z + \omega(z)x\big) = (1-\gamma)\lambda z + \frac{1}{2}\gamma z = \Big(\frac{\gamma}{2} + \lambda - \gamma\lambda\Big)z.$$

Ceci montre que les sous-espaces propres associés à λ (selon A) et à

$$\lambda_\gamma = \frac{\gamma}{2} + \lambda - \gamma\lambda$$

(selon A_γ) sont égaux. □

Le résultat qu'on vient d'établir nous dit que l'étude de plusieurs propriétés structurelles des algèbres pondérées peut se réduire au cas d'écriture le plus simple par orbite. Cependant, certaines propriétés (multiplicatives) ne sont pas transmises sauf des cas très particuliers. On a :

Proposition 11. *Supposons que A vérifie une des conditions suivantes* :

(a) $x^2y = \omega(x)xy$ *pour tout* $x, y \in A$ (*normale*).
(b) $x^2y = x(xy)$ *pour tout* $x, y \in A$ (*alternative*).
(c) $x^4 = (x^2)^2$ *pour tout* $x \in A$ (*à puissance associative*).
(d) $x^2(xy) = x(x^2y)$ *pour tout* $x, y \in A$ (*de Jordan*).

Pour que la gamétisée A_γ vérifie la même propriété que A il faut et il suffit que :

(e) *A soit gamétique* (*pour la condition* (a)).
(f) *A soit gamétique ou que* $\gamma = 2$ (*pour les autres conditions*).

Démonstration. Étant donné que tant (b) comme (d) entraînent (c), nous allons montrer (a) et (c) : prenons $\omega(x) = \omega(y) = 1$. Or,

$$\begin{aligned}
\left(x_\gamma^2 y\right)_\gamma &= (1-\gamma)\left[\left((1-\gamma)x^2 + \gamma x\right)y\right] + \frac{\gamma}{2}\left[(1-\gamma)x^2 + \gamma x + y\right] \\
&= (1-\gamma)^2 x^2 y + \gamma(1-\gamma)xy + \frac{\gamma(1-\gamma)}{2}x^2 + \frac{\gamma}{2}\gamma x + \frac{\gamma}{2}y \\
&\quad \text{(comme } x^2y = xy \text{ car par hypothèse } A \text{ est normale)} \\
&= (1-\gamma)xy + \frac{\gamma(1-\gamma)}{2}x^2 + \frac{\gamma}{2}\gamma x + \frac{\gamma}{2}y.
\end{aligned}$$

Si l'on impose que $(x_\gamma^2 y)_\gamma = (xy)_\gamma$, il en résulte l'égalité

$$(1-\gamma)xy + \frac{\gamma(1-\gamma)}{2}x^2 + \frac{\gamma}{2}\gamma x + \frac{\gamma}{2}y = (1-\gamma)xy + \frac{\gamma}{2}x + \frac{\gamma}{2}y.$$

Comme $\gamma \neq 1$ et le cas $\gamma = 0$ n'est pas intéressant (car $A_\gamma = A$), tout ceci se réduit à l'égalité $x^2 = x$. De ce fait, par la Proposition 3 et la Remarque 4, il découle que A est gamétique. La réciproque ne pose aucun problème.

Quant à (c), on rappelle que (Remarque 8)

$$x_\gamma^4 = (1-\gamma)^3 x^4 + 2\gamma(1-\gamma)^2 x^3 + \frac{\gamma(1-\gamma)(2+5\gamma)}{4}x^2 + \frac{\gamma(2+\gamma+\gamma^2)}{4}x,$$

et avec un calcul similaire on établit que :

$$\left(x_\gamma^2\right)_\gamma^2 = (1-\gamma)^3\left(x^2\right)^2 + 2\gamma(1-\gamma)^2 x^3 + \gamma\left(1-\gamma^2\right)x^2 + \gamma^2 x.$$

Compte tenu que A est à puissances associatives, si l'on impose que $x_\gamma^4 = (x_\gamma^2)_\gamma^2$, on obtient :

$$\frac{\gamma(1-\gamma)(2+5\gamma)}{4}x^2 + \frac{\gamma(2+\gamma+\gamma^2)}{4}x = \gamma(1+\gamma)(1-\gamma)x^2 + \gamma^2 x.$$

En excluant, comme ci-dessus, les valeurs $\gamma = 0$ et 1, ceci se résume à l'égalité $(\gamma - 2) \times (x^2 - x) = 0$, d'où soit $\gamma = 2$, soit A est gamétique. Pour la réciproque, concernant le cas $\gamma = 2$, il suffit de se rappeler que l'opérateur de gamétisation O_2 est involutif (Proposition 5(b)). □

4. Opération sur les identités ω-polynomiales

Si $M_n(X)$ est un monôme quelconque de degré $n \geqslant 1$, on dénote par $M_n(x)_\gamma$ le calcul de la fonction monomiale correspondante sous le produit de A_γ. On a :

Lemme 12. $M_n(x)_\gamma = (1-\gamma)^{n-1} M_n(x) + \cdots$ *(termes de degrés* $< n$*).*

Démonstration. Soit $x \in A$, $\omega(x) = 1$. Comme $n \geqslant 1$ on peut toujours décomposer $M_n(x) = P_k(x) Q_{n-k}(x)$ en produit de monômes avec $k \neq 0$. Supposons l'énoncé vrai pour des degrés plus petits que n. On a :

$$\begin{aligned} P_k(x)_\gamma &= (1-\gamma)^{k-1} P_k(x) + \cdots, \\ Q_{n-k}(x)_\gamma &= (1-\gamma)^{n-k-1} Q_{n-k}(x) + \cdots. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} M_n(x)_\gamma &= \bigl(P_k(x)_\gamma Q_{n-k}(x)_\gamma\bigr)_\gamma \\ &= (1-\gamma) P_k(x)_\gamma Q_{n-k}(x)_\gamma + \frac{\gamma}{2}\bigl[P_k(x)_\gamma + Q_{n-k}(x)_\gamma\bigr]. \end{aligned}$$

Mais, comme par hypothèse :

$$\begin{aligned} P_k(x)_\gamma &= (1-\gamma)^{k-1} P_k(x) + \cdots, \\ Q_{n-k}(x)_\gamma &= (1-\gamma)^{n-k-1} Q_{n-k}(x) + \cdots, \end{aligned}$$

il en résulte :

$$M_n(x)_\gamma = (1-\gamma)^{n-1} P_k(x) Q_{n-k}(x) + \cdots = (1-\gamma)^{n-1} M_n(x) + \cdots. \qquad \square$$

Théorème 13. *Si A vérifie une identité ω-polynomiale de monôme directeur $M_n(X)$, alors, A_γ satisfait une identité de même monôme directeur.*

Démonstration. Supposons que l'identité

$$E_n(x) : M_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k M_k(x)$$

est vérifiée par les $x \in A$, $\omega(x) = 1$. Comme la gamétisation est une opération inversible, soit $\delta \in K - \{1\}$ tel que O_δ est l'inverse de O_γ. Ainsi,

$$x^2 = (1-\delta) x_\gamma^2 + \delta x$$

et en utilisant le lemme précédent, pour $k = 1, 2, \ldots, n$ on a :

$$M_k(x) = (1-\delta)^{k-1} M_k(x)_\gamma + \cdots \text{(termes de degrés} < k).$$

En remplaçant les $M_k(x)$ dans $E_n(x)$ on obtient :

$$(1-\delta)^{n-1} M_n(x)_\gamma + \cdots = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \big[(1-\delta)^{k-1} M_k(x)_\gamma + \cdots\big].$$

En dégageant $M_n(x)_\gamma$ on aboutit à :

$$M_n(x)_\gamma = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta_k N_k(x)_\gamma.$$

Ceci veut dire que A_γ satisfait une identité ω-polynomiale de monôme directeur $M_n(X)$. □

Proposition 14. *La gamétisée d'une train-identité est une train-identité de même degré.*

Démonstration. Se fait sans problèmes en utilisant la Proposition 7 avec la même démarche employé ci-dessus. □

Théorème 15. *Pour tout $n \geqslant 2$ il existe une et seulement une train-identité invariante pour toute gamétisation, que l'on appellera l'invariante universelle.*

Nous parlons d'invariance au sens formel : c'est-à-dire, que les coefficients en jeu dans $E_n(x)$ et $E_n(x)_\gamma$ sont respectivement les mêmes. La démonstration de ce théorème découle des résultats qui suivent :

Lemme 16. *Une identité ω-polynomiale $E_n(x)$ est invariante sous O_γ si et seulement si pour tout $\delta \in K - \{1\}$, $E_n(x)_\delta$ l'est aussi.*

Démonstration. Du fait que $E_n(x)_\gamma = E_n(x)$ et en sachant que les opérateurs O_γ et O_δ commutent (Remarque 9) on a :

$$E_n(x)_\delta = \big(E_n(x)_\gamma\big)_\delta = E_n(x) = \big(E_n(x)_\delta\big)_\gamma.$$

La réciproque est immédiate. □

Proposition 17. *Soit $\gamma \in K - \{1\}$ tel que $1-\gamma$ n'est pas une racine de l'unité. Alors pour tout $n \geqslant 2$ il existe une et seulement une train-identité invariante sous O_γ.*

Démonstration. Par la Proposition 14 on sait qu'on a

$$x_\gamma^n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_\gamma^i. \tag{$*$}$$

Or, par la Proposition 7 nous savons que pour $2 \leqslant i \leqslant n$,

$$x_\gamma^i = \sum_{k=1}^{i} (1-\gamma)^{k-1} \overline{\gamma}_{i,k} x^k.$$

En posant $\theta_{i,k} = (1-\gamma)^{k-1}\overline{\gamma}_{i,k}$, puis en remplaçant dans $(*)$, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_{n,k} x^k = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{i} \theta_{i,k} x^k \right),$$

d'où, comme $\theta_{n,n} \neq 0$,

$$x^n = \frac{1}{\theta_{n,n}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\theta_{n,k} + \sum_{i=k}^{n-1} \alpha_i \theta_{i,k} \right) x^k.$$

Si l'on impose l'égalité formelle $E_n(x)_\gamma = E_n(x)$, il en résulte

$$\alpha_k = \frac{1}{\theta_{n,n}} \left(-\theta_{n,k} + \sum_{i=k}^{n-1} \alpha_i \theta_{i,k} \right).$$

Ainsi,

$$(\theta_{n,n} - \theta_{k,k})\alpha_k = -\theta_{n,k} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i \theta_{i,k}.$$

Mais, $\theta_{k,k} = (1-\gamma)^{k-1}$ donc

$$\big((1-\gamma)^{n-k} - 1\big)\Big(1 - \frac{\gamma}{2}\Big)^{k-1} \alpha_k = -\theta_{n,k} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i \theta_{i,k}.$$

Comme par hypothèse $1-\gamma$ n'est pas racine de l'unité, tout ceci veut dire qu'on peut calculer α_k (et de façon unique) si l'on connaît déjà les coefficients $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_{n-1}$, ce qu'on accomplit récursivement car on peut établir sans difficulté que $\alpha_{n-1} = n/2$.

La proposition étant démontré, nous pouvons faire la preuve du Théorème 15 : montrons que l'identité $E_n(x)$ qu'on vient de construire ci-dessus est aussi invariante sous d'autres gamétisations et ne dépend donc pas de γ.

Soit $\delta \in K - \{1\}$, par le Lemme 16 on a :

$$\bigl(E_n(x)_\delta\bigr)_\gamma = E_n(x)_\delta.$$

Il en résulte que $E_n(x)_\delta$ est invariante sous l'action de O_γ et a fortiori (par la condition d'unicité donné par la proposition) que $E_n(x)_\delta = E_n(x)$. $\square$

Remarque 18. L'égalité formelle $E_n(x)_\gamma = E_n(x)$ n'entraîne forcément pas que l'on ait un isomorphisme d'algèbres entre A et A_γ, bien que la réciproque soit vraie. Voici la liste de train-identités invariantes universelles sous gamétisation pour des degrés $\leqslant 5$:

$$\begin{aligned}
x^3 &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,\\
x^4 &= 2x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}x,\\
x^5 &= \frac{5}{2}x^4 - \frac{9}{4}x^3 + \frac{7}{8}x^2 - \frac{1}{8}x.
\end{aligned}$$

Plus généralement, on a :

Proposition 19. *Les train-identités invariantes universelles sont*

$$x^n = \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} \frac{2n-k-1}{2(n-1)} \binom{n-1}{k-1} x^k.$$

Démonstration. En effet, si (A,ω) est une train algèbre d'ordre n, d'identité

$$x^n = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_{n-2}x^{n-2} + \cdots + \alpha_1 x, \tag{$*$}$$

alors pour tout $x \in A$, $\omega(x) = 1$, le polynôme

$$P(X) = X^n - \alpha_{n-1}X^{n-1} - \alpha_{n-2}X^{n-2} - \cdots - \alpha_1 X$$

est annulateur de l'endomorphisme L_x (voir [8, Chapter 3]). Or, si λ est une valeur propre de L_x nous savons que $\lambda_\gamma = \gamma/2 + \lambda - \gamma\lambda$ est la valeur propre associée à L_x dans A_γ (démonstration du Théorème 10(e)) ; de plus, si on prend $y \in \ker(\omega)$ tel que $xy = \lambda y + z$ il découle que $(xy)_\gamma = \lambda_\gamma y + (1-\gamma)z$, c'est-à-dire que les valeurs propres λ et λ_γ ont la même multiplicité. De ce fait, si dans une extension convenable de K on a

$$P(X) = X(X-1)\prod_{k=1}^{n-2}(X - \lambda_k),$$

le polynôme respectif par rapport à la structure de A_γ est

$$P_\gamma(X) = X(X-1)\prod_{k=1}^{n-2}\left(X - \left(\frac{\gamma}{2} + \lambda_k - \gamma\lambda_k\right)\right).$$

Tout ceci veut dire que l'identité $(*)$ est l'invariante universelle si et seulement si l'on a $P_\gamma(X) = P(X)$, c'est-à-dire si $\lambda_k = \frac{1}{2}$, $1 \leqslant k \leqslant n-2$. Dans ces conditions

$$P(X) = X(X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

et un simple calcul donne le résultat demandé. □

Remarque 20. Les algèbres vérifiant une ω-identité invariante universelle sont très méconnues car leur étude présente des difficultés singulières. Ainsi par exemple, parmi les train algèbres d'ordre 3, celle déterminée par l'identité $x^3 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ est la seule pour laquelle on ne peut pas assurer l'existence d'un idempotent. Le même type de problèmes, se rencontre dans l'algèbre vérifiant $(x^2)^2 = 2x^3 - x^2$; or, comme on le verra ci-après, cette ω-identité est aussi une invariante universelle.

Enfin, de la partie finale de la démonstration de la Proposition 17, on peut aussi conclure que si $1-\gamma$ est une racine de l'unité de degré m alors O_γ admet pour $n > m$ (en plus des identités invariantes universelles uniques) des familles infinies paramétrisées de train-identités invariantes, à savoir de la forme

$$x^n = \frac{n}{2}x^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i x_\gamma^i$$

où les α_i sont fonction des α_k tels que $k \geqslant i$ et $(1-\gamma)^{n-k} = 1$.

Dans cette situation nous avons la valeur $\gamma = 2$, qui admet des identités invariantes pour tout n (d'ailleurs, cette valeur de γ joue un rôle tout à fait particulier : comme on le sait, O_2 est involutif et des propriétés telles la condition de Jordan sont transmises sous son action). Voici quelques exemples de familles d'identités invariantes sous O_2 :

$$\begin{aligned}
x^3 &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,\\
x^4 &= 2x^3 + \alpha x^2 - (1+\alpha)x,\\
x^5 &= \frac{5}{2}x^4 + \alpha x^3 - \frac{3\alpha+5}{2}x^2 + \frac{2+\alpha}{2}x.
\end{aligned}$$

Et de manière générale, de la démonstration de la Proposition 19 il découle que l'on peut trouver les coefficients des identités invariantes sous O_2 en résolvant l'équation polynomiale :

$$X^n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X^i = (X-1)^n - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n+i+1} \alpha_i (X-1)^i.$$

5. Quelques cas d'étude

Dans ce qui suit, nous verrons que l'outil fournit par la gamétisation permet de simplifier beaucoup l'étude des algèbres vérifiant des ω-identités, permettant en général de travailler avec des expressions d'écriture allégée, ce qui n'est pas plus mal !

5.1. Train-identités d'ordre 3

Les train-algèbres d'ordre 3, celles vérifiant l'identité $x^3 = (1-\alpha)x^2 + \alpha x$, ont été étudiées dans plusieurs travaux, tant du point de vue des structures qu'en ce qui concerne la construction de certaines classifications (cf. [2]). On a :

Théorème 21. *Toute train-identité d'ordre* 3 *est soit l'invariante universelle, soit la gamétisée de* $x^3 = x$.

Démonstration. Soit $x^3 = (1-\alpha)x^2 + \alpha x$ la train-identité. On rappelle que si $\alpha = -1/2$ nous avons l'identité invariante universelle $x^3 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$. Supposons donc que $\alpha \neq -1/2$: or, à l'aide de la Remarque 8, comme

$$x_\gamma^3 = (1-\gamma)^2 x^3 + \frac{3\gamma(1-\gamma)}{2} x^2 + \frac{\gamma(1+\gamma)}{2} x,$$

la gamétisée de $x^3 = x$ découle de

$$(1-\gamma)^2 x^3 + \frac{3\gamma(1-\gamma)}{2} x^2 + \frac{\gamma(1+\gamma)}{2} x = x,$$

d'où on obtient

$$x^3 = -\frac{3\gamma}{2(1-\gamma)} x^2 + \frac{\gamma+2}{2(1-\gamma)} x.$$

Mais, en posant $\alpha = (\gamma+2)/(2(1-\gamma))$ nous avons la train-identité

$$x^3 = (1-\alpha)x^2 + \alpha x.$$

Il ne reste qu'à remarquer que l'application

$$K-\{1\}\to K-\left\{-\frac{1}{2}\right\},\quad \gamma\mapsto\frac{\gamma+2}{2(1-\gamma)},$$

est bijective. □

Bien entendu, on aurait pu aussi bien énoncer le théorème en utilisant l'identité $x^3=x^2$ au lieu de $x^3=x$.

5.2. *Identités de monôme directeur* $(x^2)^2$

Il s'agit ici des algèbres du type

$$\left(x^2\right)^2=\alpha x^3+\beta x^2+(1-\alpha-\beta)x,$$

dont on fait partie les algèbres de Bernstein et celles d'Etherington. Ces algèbres on été étudiées dans [11] et se divisent en deux classes :

$$\begin{aligned}\left(x^2\right)^2 &= 4\alpha x^3+\left(1-2\alpha-4\alpha^2\right)x^2+\left(4\alpha^2-2\alpha\right)x,\\ \left(x^2\right)^2 &= (2\alpha+1)x^3-\left(2\alpha^2+\alpha\right)x^2+\left(2\alpha^2-\alpha\right)x,\end{aligned}$$

qui coïncident pour $\alpha=1/2$ sur

$$\left(x^2\right)^2=2x^3-x^2.$$

On sait que qu'une algèbre vérifiant cette dernière identité l'existence d'idempotents n'est pas assurée. Nous avons :

Proposition 22. *Si $\gamma\neq 2$ il existe une et seulement une identité invariante universelle de monôme directeur $(x^2)^2$, à savoir* : $(x^2)^2=2x^3-x^2$.

Démonstration. Il suffit de remplacer :

$$\begin{aligned}x_\gamma^2 &= (1-\gamma)x^2+\gamma x,\\ x_\gamma^3 &= (1-\gamma)^2x^3+\frac{3\gamma(1-\gamma)}{2}x^2+\frac{\gamma(1+\gamma)}{2}x,\\ \left(x_\gamma^2\right)_\gamma^2 &= (1-\gamma)^3\left(x^2\right)^2+2\gamma(1-\gamma)^2x^3+\gamma\left(1-\gamma^2\right)x^2+\gamma^2x,\end{aligned}$$

dans $(x_\gamma^2)_\gamma^2=\alpha x_\gamma^3+\beta x_\gamma^2+(1-\alpha-\beta)x$. □

Le cas $\gamma=2$ apparaît à nouveau. D'ailleurs, avec les mêmes techniques on trouve que

$$\left(x^2\right)^2=2x^3+\alpha x^2-(1+\alpha)x,\quad \alpha\in K$$

est une famille infinie d'identités invariantes sous O_2.

Théorème 23. *Toute identité de monôme directeur* $(x^2)^2$ *est soit l'invariante universelle, soit la gamétisée d'une identité de Bernstein ou d'Etherington.*

Démonstration. Nous rappelons que les algèbres de Bernstein et d'Etherington sont déterminées, respectivement, par les identités

$$\bigl(x^2\bigr)^2 = x^2 \quad \text{et} \quad \bigl(x^2\bigr)^2 = x.$$

Or, la gamétisation de cette dernière émerge de l'égalité $(x_\gamma^2)_\gamma^2 = x$ d'où après remplacement et simplification, il en résulte :

$$\bigl(x^2\bigr)^2 = \frac{-2\gamma}{1-\gamma}x^3 - \frac{\gamma(1+\gamma)}{(1-\gamma)^2}x^2 + \frac{1+\gamma}{(1-\gamma)^2}x.$$

L'application

$$K - \{1\} \to K - \{2\}, \quad \gamma \mapsto \frac{-2\gamma}{1-\gamma},$$

étant bijective, nous posons :

$$2\alpha + 1 = \frac{-2\gamma}{1-\gamma}$$

pour obtenir ainsi l'identité

$$\bigl(x^2\bigr)^2 = (2\alpha+1)x^3 - \bigl(2\alpha^2+\alpha\bigr)x^2 + \bigl(2\alpha^2-\alpha\bigr)x.$$

Avec la même démarche, en gamétisant $(x^2)^2 = x^2$ et en faisant le même changement de variable, on trouve la famille

$$\bigl(x^2\bigr)^2 = 4\alpha x^3 + \bigl(1-2\alpha-4\alpha^2\bigr)x^2 + \bigl(4\alpha^2-2\alpha\bigr)x.$$

Par construction, dans les deux cas $\alpha \neq 1/2$. □

5.3. *Train-identités d'ordre* 4

Nous rappelons qu'étant donné une train-identité

$$x^4 = \alpha x^3 + \beta x^2 + (1-\alpha-\beta)x,$$

on lui associe le polynôme

$$X^4 - \alpha X^3 - \beta X^2 - (1-\alpha-\beta)X,$$

qu'on décompose dans une extension convenable :

$$X(X-1)(X-r)(x-s).$$

Les scalaires r et s sont appelés les train-racines de l'identité. On sait que si $r, s \neq 1/2$, alors toute algèbre vérifiant une telle train-identité admet des idempotents (cf. [7]).

C'est le cas par exemple des train-identités simples : $x^4 = x^k,\ k = 1, 2, 3$. Par contre, ce n'est pas le cas des identités de la forme

$$x^4 = \frac{2\alpha+3}{2}x^3 - \frac{3\alpha+1}{2}x^2 + \frac{\alpha}{2}x,$$

dont l'invariante universelle est un cas particulier $(\alpha = 1/2)$.

Étant donnée la préservation des idempotents sous l'action des opérateurs O_γ (Théorème 10), tout cela montre que pour l'ordre 4 la gamétisation des train-identités simples ne fournit pas la totalité des train-identités non invariantes, comme c'étaient les cas étudiés avant. Concernant ceci on a :

Théorème 24. *Toute train-identité d'ordre* 4 *est soit une invariante de* O_2 *soit la gamétisée de*

$$x^4 = \delta x^2 + (1-\delta)x.$$

Démonstration. Avec les mêmes techniques employées jusqu'ici, la gamétisée de $x^4 = \delta x^2 + (1-\delta)x$ est :

$$x^4 = \frac{-2\gamma}{1-\gamma}x^3 + \frac{4\delta - \gamma(2+5\gamma)}{4(1-\gamma)^2}x^2 + \frac{\gamma(\gamma+2) - 4(\delta+1)}{4(1-\gamma)^2}x.$$

Ce qu'on peut écrire, avec $\alpha = -2\gamma/(1-\gamma)$, $\alpha \neq 2$:

$$x^4 = \alpha x^3 + \frac{4\delta(\alpha-2)^2 + \alpha(4-7\alpha)}{16}x^2 + \frac{\alpha(7\alpha-20) - 4\delta(\alpha-2)^2 + 16}{16}x.$$

Il est clair que ceci fournit toutes les train-identités

$$x^4 = \alpha x^3 + \beta x^2 + (1-\alpha-\beta)x$$

telles que avec $\alpha \neq 2$. Pour le cas $\alpha = 2$ l'identité devient

$$x^4 = 2x^3 + \beta x^2 - (1+\beta)x,$$

ce qui est l'invariante type sous O_2. □

On peut donc réduire l'étude des train-algèbres d'ordre 4 à celles vérifiant une des identités en jeu dans l'énoncé ci-dessus. L'existence d'idempotents est assurée sauf quand $\delta \neq 7/4$ et $\beta \neq -5/4$, valeurs pour lesquelles ces identités prennent $1/2$ comme train-racine.

Références

[1] M.T. Alcalde, C. Burgueño, C. Mallol, Les pol-(n, m)-algèbres, Linear Algebra Appl. 191 (1993) 213–234.
[2] R. Costa, On train algebras of rank 3, Linear Algebra Appl. 148 (1991) 1–12.
[3] I.M.H. Etherington, Non-associative algebra and the symbolism of genetics, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. B 61 (1941) 24–42.
[4] S. González, C. Martínez, Idempotent elements in a Bernstein algebra, J. London Math. Soc. (2) 42 (1990) 430–436.
[5] H. Guzzo Jr., The Peirce decomposition for commutative train algebras, Comm. Algebra 22 (14) (1994) 5745–5757.
[6] P. Holgate, Genetic algebras associated with a polyploidy, Proc. Edinburgh Math. Soc. 33 (1965) 1–9.
[7] J. López-Sanchez, E. Rodriguez, On train algebras of rank 4, Comm. Algebra 24 (14) (1996) 439–445.
[8] Ju.I. Lyubich, Mathematical Structures in Population Genetics, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
[9] C. Mallol, A. Micali, M. Ouattara, Sur les algèbres de Bernstein IV, Linear Algebra Appl. 158 (1991) 1–26.
[10] C. Mallol, Extensions pondérées d'algèbres, Algebras Groups Geom. 14 (1) (1997) 41–48.
[11] C. Mallol, A. Suazo, Une classe d'algèbres pondérées de dégrée 4, Comm. Algebra 225 (1995) 187–194.
[12] S. Walcher, Algebras with satisfy a train equation for the first three plenary powers, Arch. Math. (Basel) 56 (1991) 547–551.
[13] A. Worz-Buzekros, Algebras in Genetics, in: Lecture Notes in Biomath., Vol. 36, Springer-Verlag, Berlin, 1980.